Estudo sobre previsibilidade do comportamento caótico de séries temporais financeiras

José Augusto Morais de Andrade Júnior*

Março 2005

RESUMO
Este é um artigo de revisão cujo objetivo é identificar as diversas técnicas que têm sido utilizadas para a detecção de caos determinístico em séries temporais e para a previsão do seu comportamento futuro. Serão analisados alguns artigos que apresentam técnicas e métodos baseados no uso de redes neurais associados às técnicas desenvolvidas pela teoria do caos para predição do comportamento de séries de dados, especialmente de dados financeiros.

Palavras-chave: Caos. Séries temporais não-lineares. Sistemas dinâmicos. Extrapolação.

*Pesquisador do CEPEFIN, Estudante da FEARP - USP, Membro estudante do IEEE

1 Introdução

Sabe-se que sistemas dinâmicos não-lineares podem apresentar comportamento caótico, ou seja, divergência exponencial a pequenas variações nos estados iniciais. Poincarè (1854-1912), inspirado em estudos sobre a mecânica celeste, foi um dos primeiros a perceber a transição ordem-caos em sistemas de equações diferenciais freqüentemente presentes nos sistemas dinâmicos. (1) Mais que isto, ao estudar a teoria cinética dos gases, ele profetizou: "Talvez a teoria cinética dos gases é que vá se desenvolver e servir de modelo para outras (...) A lei física, então, assumiria um aspecto inteiramente novo (...) teria o caráter de uma estatística"(2).
A descoberta de que mapas unidimensionais com função geradora bem simples, como o mapa logístico (eq. 1), apresentam comportamento caótico, podendo inclusive serem utilizados como função geradora de números aleatórios, como foi proposto por Von Neumann, reforça a necessidade de instrumentos novos para lidar com séries temporais não-lineares.
Mapa logístico:

$$x_n = \mu x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \tag{1}$$

É útil notar, entretanto, que existe um paradoxo nesta questão entre aleatoriedade (inexistência de relação causa-efeito) e determinismo. Se é possível, partindo-se de sistemas determinísticos até bastante simples, produzir séries que apresentam distribuição praticamente contínua (ruido branco) no espaço de fases, quem pode categoricamente afirmar que existe uma aleatoriedade real, intrínseca a determinadas variáveis no mundo físico macroscópico (excluído o mundo das micro-partículas quânticas)?
É certo, porém, que a imensa sensibilidade às condições iniciais dos sistemas caóticos, aliada à precisão computacional finita dos melhores computadores, bem como os erros e ruidos inerentes a qualquer experiência levam, quase que invariavelmente, a uma pseudo-aleatoriedade, no sentido de que a repetição de um mesmo experimento dinâmico complexo, com as mesmas condições iniciais, produz diferentes séries de dados(3). Até que ponto, no mundo macroscópico, pode existir uma aleatoriedade real é assunto filosófico altamente complexo e além do escopo deste trabalho.

De fato, é exatamente isto que vem ocorrendo a partir da Teoria do Caos. Diante da impossibilidade prática de se obterem medidas com precisão infinita (infinitos algarismos significativos), resta a possibilidade de lidar estatisticamente com a incerteza intrínseca aos sistemas dinâmicos caóticos. Portanto, as técnicas utilizadas para caracterização e previsão de séries temporais geradas por sistemas dinâmicos não-lineares baseiam-se fortemente em probabilidades(4).

No caso específico de sistemas cuja dinâmica é desconhecida (não se sabe qual o sistema de equações diferenciais que o gera), como é o caso das séries econômico-financeiras, o problema torna-se ainda maior. Se não se sabe ao certo quais as variáveis (dimensões) do sistema, e têm-se apenas séries temporais cuja dinâmica, à primeira vista, é caótica, como pode-se chegar a algum grau de previsibilidade, e de que forma? Buscar-se-á, neste trabalho, mostrar algumas ferramentas que têm sido utilizadas, com sucesso, na análise de séries temporais, a partir da Teoria do Caos.

Uma série de dados pode ser resultante de uma dinâmica regular, caótica ou estocástica (aleatória). Existem medidas quantitativas que permitem determinar qual a natureza da dinâmica (entropia KS), qual o número de dimensões envolvidas (dimensão fractal) e o grau de previsibilidade de longo prazo (expoente característico de Lyapunov).

Veremos como estas medidas têm sido utilizadas, na prática, para definir a melhor arquitetura e o dimensionamento ótimo de redes neurais para a previsão de séries de dados econômico-financeiros.

2 Medidas de previsibilidade em séries de dados caóticas

2.1 O coeficiente característico de Lyapunov

A definição de caos determinístico prevê justamente que haja um desvio exponencial da trajetória a partir de pequenas variações no estado inicial. O expoente característico de Lyapunov fornece a medida quantitativa desta

divergência.

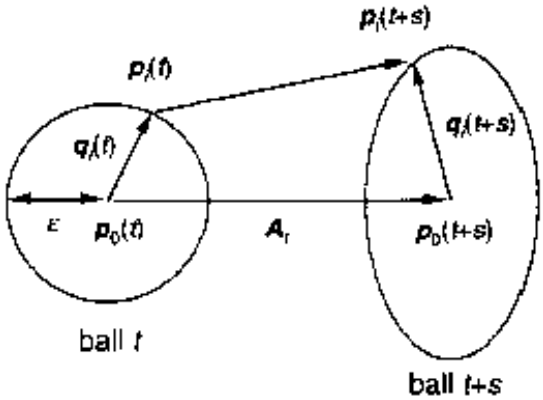

Figura 1: Desvio na trajetória

O expoente de Lyapunov é definido como o a taxa exponencial de divergência de uma trajetória resultante de uma pequena perturbação nas condições iniciais. Quanto maior for este coeficiente, maior será a divergência a longo prazo da série de dados, mais difícil portanto prever seu comportamento a longo prazo.
Num sistema n-dimensional, existem n coeficientes de Lyapunov, que medem a sensibilidade às condições iniciais para cada uma das dimensões envolvidas. O coeficiente característico de Lyapunov é o mais positivo de todo o espectro de coeficientes.

2.2 A entropia de Kolgomorov-Sinai

Claude Shannon, fundador da teoria matemática da informação, definiu o conceito de informação como a quantidade de bits que faltam a um observador para, sabendo a probabilidade da ocorrencia de um evento, prever exatamente sua ocorrência.

$$I(p) = \sum_{i=1}^{R} p_i ln p_i \tag{2}$$

Vemos, a partir da equação acima, que o grau de informação depende da

distribuição das probabilidades de ocorrência do evento considerado. Se a distribuição é contínua (com todos eventos equiprováveis), a informação de Shannon é mínima, portanto.
A entropia de Shannon (H) é definida como o valor simétrico da informação, $-I(p)$, e mede a falta de informação sobre o futuro.

$$H = -I(p) \tag{3}$$

A entropia de Kolgomorov-Sinai (K) é a taxa média de criação ou perda de informação acerca uma determinada dinâmica ao longo do tempo. Sabe-se que processos regulares não produzem informação ao longo do tempo, e a ignorância do observador permanece inalterada ($K = 0$). Os processos aleatórios ou estocásticos, ao contrário, geram informação continuamente, o que leva a ignorância do observador a tornar-se cada vez maior ($K \to \infty$). Nos sistemas caóticos existe também a geração de informação (ou desinformação, se considerarmos o ponto de vista do observador) no sistema, entretanto é finita (e portanto limitada) e positiva. Seu limite está correlacionado os expoentes de Lyapunov segundo o teorema de Ruelle(5):

$$0 < K < \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \tag{4}$$

É útil salientar que "a existência de uma entropia de Kolgomorov-Sinai positiva e finita é condição suficiente para a existência de caos determinístico". (1)
A entropia de Kolgomorov-Sinai permite saber, portanto, a característica da dinâmica geradora de uma série de dados experimentais.

3 Detecção de ordem em séries caóticas

O teorema da imersão dimensional de Takens prova que é possível reconstruir um espaço de fases D-dimensional por outro D_e-dimensional (com $D_e < D$), a partir de um sinal s(t) medido. Em palavras mais simples, o sinal s(t), referente a cada uma das dimensões, contém em si informações de estado não

observáveis, que permitem definir o estado presente de maneira autônoma. Exemplificando, temos o sistema de equações diferenciais de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -c(X - Y) \\ \dot{Y}(t) &= aX - Y - XZ \\ \dot{Z}(t) &= b(XY - Z) \end{aligned} \tag{5}$$

Cada componente, seja x(t), y(t) ou z(t), deve conter informações suficientes para reproduzir o seu comportamento presente e futuro.
Trata-se de verificar agora quais as formas disponíveis para descobrir o mapa que aproxima o sistema como um todo; ou seja, para reconstruir-se o espaço de fases do sistema.

3.1 Reconstrução do espaço de fases

Existem basicamente três técnicas que podem ser usadas na reconstrução de um espaço de fases:

- O método das diferenças finitas
- O método do deslocamento temporal
- A dinâmica simbólica do sistema

3.2 O método das diferenças finitas

É sabido que um sistema de equações diferenciais pode ser discretizado temporal e/ou espacialmente, utilizando-se para isto de uma grade de pontos igualmente ou desigualmente espaçados (point lattice)(6).
Muitos fenômenos, entretanto, possuem natureza essencialmente discreta, como a população de uma espécie e do seu predador, cujo modelo matemático é o mapa logístico (eq. 1). O mapa logístico pode também ser utilizado para modelar o comportamento dos mercados(7). Segundo Garliauskas, pode-se

definir o preço de um produto / ação como um mapa do tipo:

$$P(t+1) = sP(t) \tag{6}$$

Onde s representa o crescimento da demanda pelo produto/ação. Quando os vendedores baixam o preço por um fator $sP^2(t)$, a demanda cresce à taxa s. a equação do preço fica assim:

$$P(t+1) = sP(t) - sP^2(t) = sP(t)(1 - P(t)) \tag{7}$$

É nítido que este mapa é o mapa logístico. Sabe-se que para $\mu > 3.5699456...$ (constante de Feigenbaum), este mapa apresenta comportamento caótico entremeado por regiões de comportamento periódico.

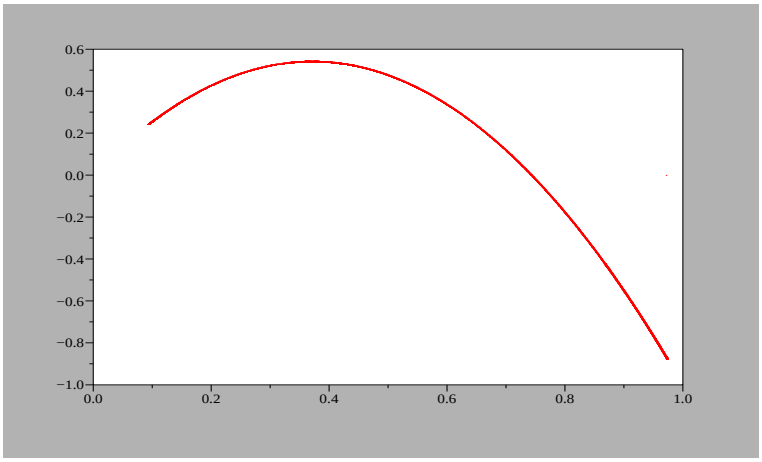

Figura 2: Gráfico x_n versus x_n - x_{n-1} do mapa logístico

Vemos, no gráfico acima, que um mapa com comportamento caótico perfeitamente caracterizado apresenta uma ordem subjacente que permite prever seu comportamento, ao menos de curto prazo.

3.3 O método do deslocamento temporal

O espaço do sistema pode ser reconstruído a partir de uma série temporal escalar considerando a técnica da defasagem no tempo. Está técnica foi inicialmente proposta por Ruelle (1979) e Packard (1980) e posteriormente por Takens (1981) e Sauer et al. (1991). A técnica traça $s(t)$ versus $s(t+\tau)$, onde τ é uma defasagem . Motivado pela trajetória no espaço de fase reconstruído e propriedades similares ao de fase original, sendo equivalentes. O sinal experimental é representado por s(n), n= 1,2 ....N, sendo N o total de amostras, o vetor é reconstruído por $u(n) = s(n), s(n+\tau), ..., s(n+(d-1)\tau$ onde u(n) representa a dinâmica reconstruída na imersão, d a dimensão de imersão e τ o passo de reconstrução (deslocamento, atraso, defasagem) temporal. Os resultados de Takens(1980) garantem que o atrator reconstruído e o original são difeomórficos[1].

3.3.1 Escolha do passo de reconstrução (τ) e da dimensão de imersão (d)

Segundo Takens *apud* Fiedler-Ferrara(1), a escolha do atraso τ numa série de dados isenta de ruído e com número infinito de pontos é arbitrária. Ocorre, entretanto, que os dados empíricos são normalmente contaminados por ruído e dispõe-se de reduzido número de pontos.
Edmonds *et al*(8), em seu artigo *"Simultaneous Prediction of Multiple Financial Time Series using Supervised Learning and Chaos Theory"*, mostram as técnicas utilizadas para a escolha destes parâmetros.
Uma análise profunda acerca dos algoritmos que permitem a reconstrução do atrator e outros indicadores do caos determinístico podem ser encontrados em Hegger e Kantz(9).

3.4 A dinâmica simbólica do caos

Suponhamos um espaço X N-dimensional. Particionando este espaço em hipercubos de tamanho ϵ, que serão chamados de caixas, teremos um conjunto

[1]difeomórfico significa que o mapeamento u(n) em s(n) é inversível, contínuo e diferenciável

de caixas A_i de mesmo tamanho. As caixas são disjuntas, isto é, não possuem pontos em comum.
Matematicamente: $X = \bigcup_{i=1}^{R} A_i$ com $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$
Dado um mapa f, partindo do ponto x_0 que estará contido em uma caixa i_0, temos o mapa simbólico correspondente.
$x_0 \rightarrow i_0, i_1, i_2, i_3, ..., i_n$.
Se considerar-se cada caixa A_1 do conjunto de partições $A_1, A_2, ..., A_i$ como sendo uma letra de um alfabeto, e um conjunto destas letras como uma palavra, pode-se provar que existem regras, intrínsecas ao sistema dinâmico considerado, que regem a formação destas palavras. Ou seja; nem todas as sequências simbólicas (palavras) de mesmo tamanho poderão efetivamente ocorrer, pois são gramaticalmente proibidas.
A seqüência de caixas visitadas pelo mapa, a cada iteração, é chamada sequência de dinâmica simbólica. Existe, portanto, uma gramática característica da dinâmica para a formação de palavras (sequências de símbolos de tamanho n) a partir do alfabeto de símbolos.
A conseqüência mais importante é que a gramática simbólica mantêm-se a mesma para extensa classe de mapas. A universalidade gramatical pode permitir a dedução de inúmeras propriedades estatísticas sabendo-se unicamente a classe da qual a dinâmica faz parte.

4 Uso de redes neurais para a previsão de séries econômico-financeiras

Sabe-se que as redes neurais, ou filtros adaptativos não-lineares, são capazes de se auto-ajustarem e podem ser utilizados para a previsão de trajetórias n-dimensionais cujas dinâmicas geradoras são desconhecidas *a priori* (10)(11)(12).
É possível, portanto, fazer um ajustamento "cego"de uma rede neural; isto é, treinar uma rede neural a partir de uma determinada série de dados cuja dinâmica é desconhecida. Ocorre, porém, que os resultados obtidos a partir deste processo são inconclusivos, uma vez que não se sabe a origem do sucesso

ou fracasso na previsão.
Tsakoumis *et al*(11), em seu artigo *"Application of chaotic time series for short-term load prediction"*, mostram uma técnica que permite estimar o número de entradas de uma rede neural com múltiplas camadas a partir da dimensão de imersão obtida a partir do cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov e da dimensão de correlação.
Em seu artigo *"Noisy Time Series Prediction using Symbolic Representation and Recurrent Neural Network Grammatical Inference"*(13), Ah Chung Tsoi, C. Lee Giles e Steve Lawrence implementaram uma rede neural do tipo Mapa auto-organizado (*"Self Organizing Map"*) para capturar a gramática simbólica de uma série de dados caótica e ruidosa.
Veremos alguns artigos em que redes neurais foram projetadas em função das informações obtidas pelos indicadores de caos determinístico anteriormente expostas, e aplicadas, com sucesso, na previsão de séries econômico-financeiras.

4.1 Previsão do preço de energia elétrica

Yang e Duan, em seu artigo "*Chaotic Characteristics os electricity price and its forecasting model*"(14), mostraram que o preço da eletricidade na Nova Inglaterra apresenta comportamento de caos determinístico e com expoente de Lyapunov bem pequeno, o que permite realizar previsões acuradas no curto prazo.

Tabela 1: Expoentes de Lyapunov

Dimensão de imersão	6	7	8	9	10	11
Expoente de Lyapunov	0.032	0.031	0.030	0.028	0.028	0.027

Fonte: Yang e Duan (14)

Eles utilizaram uma Rede Neural Recorrente para capturar a dinâmica em questão, obtendo erros de curto prazo aceitáveis, conforme a tabela abaixo:

Tabela 2: Erros de previsão da Rede Neural

Passo (h)	Erro de previsão dia 27 Março		Erro de previsão dia 18 Abril	
	Média	Máx.	Média	Máx.
1	2.22	4.66	3.13	4.66
25	4.42	7.90	6.80	11.28
49	5.09	9.78	8.00	14.76

Fonte: Yang e Duan (14)

4.2 Predição de taxas de câmbio

Em seu artigo *"Noisy Time Series Prediction using Symbolic Representation and Recurrent Neural Network Grammatical Inference"*, (13) utilizaram uma rede neural do tipo Mapa Auto-Organizado para capturar a dinâmica simbólica, que depois entra em uma rede neural recorrente para a previsão dos valores futuros.

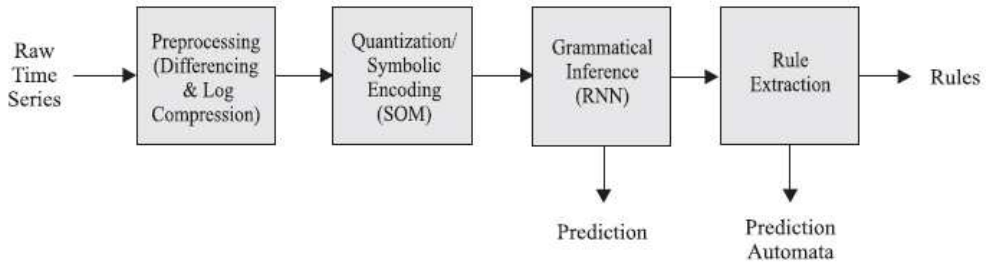

Figura 3: Esquema de funcionamento Fonte:(13)

A principal vantagem desta abordagem é que a rede que captura a dinâmica simbólica permite a extração de regras de transição de estados, permitindo a construção de uma máquina de Turing, também conhecida como máquina de estados finitos.

5 Conclusões

Os resultados obtidos a partir do uso de redes neurais na previsão de séries temporais, quando utilizada uma metodologia de tratamento dos dados que leve em consideração os aspectos relativos à reconstrução do atrator e a escolha de uma arquitetura de rede neural mais apropriada, mostram-se animadores. Estes resultados sugerem a possibilidade de se realizarem mais pesquisas com séries de dados de preços de commodities, derivativos, etc de forma a tentar reproduzir os resultados obtidos.

Referências

1 FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. *Caos: uma introdução*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

2 PRIGONINE, I. *O fim das certezas: Tempo, Caos e as Leis da Natureza*. São Paulo: Editora UNESP, 1996.

3 MCCAULEY, J. L. *Chaos, Dynamics and Fractals: an algorithmic approach to deterministic chaos*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

4 BECK, C.; SCHLöGL, F. *Thermodynamics of chaotic systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

5 RUELLE, D. *Positivity of Entropy Production in NonEquilibrium Statistical Mechanics*. 1997. Disponível em: <http://citeseer.ist.psu.edu/98000.html>.

6 POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C. *Mecânica dos flúidos*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

7 GARLIAUSKAS, A. Neural network chaos and computational algorithms of forecast in finance. In: *Proc. of IEEE SNC'99, Human Communication and Cybernetics, IEEE Press, Tokyo*. Tokyo, JP: IEEE, 1999. v. 2, p. 638–642.

8 EDMONDS, A. N.; BURKHARDT, D.; ADJEI, O. Simultaneous prediction of multiple financial time series using supervised learning and chaos theory. In: *IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN'94)*. Orlando, FL: IEEE, 1994. V, p. 3156–3163.

9 HEGGER, R.; KANTZ, H.; SCHREIBER, T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos*, v. 9, n. 2, p. 413–435, 1999.

10 DEVRIES, B.; PRINCIPE, J. C.; KUO, J. ming. *Prediction of Chaotic Time Series Using Recurrent Neural Networks*. 1998.

11 TSAKOUMIS, A. et al. Application of chaotic time series for short-term load prediction. In: . Vouliagmeni, Athens, Greece: WSEAS, 2003. p. 7. Disponível em: <http://www.worldses.org/online/>.

12 HAN, M. et al. Prediction of chaotic time series based on the recurrent predictor neural network. In: *IEEE Transactions on Signal Processing*. [S.l.]: IEEE, 2004. v. 52, p. 3409–3416.

13 TSOI, A. C.; GILES, C. L.; LAWRENCE, S. *Noisy Time Series Prediction using Symbolic Representation and Recurrent Neural Network Grammatical Inference*. dez. 17 1997.

14 YANG, H.; DUAN, X. *Chaotic Characteristics of electricity price and its forecasting model*. 2003.